



Samarqand davlat universitetning kattaqo'rg'on filiali Aniq va tabiiy fanlar fakulteti 3-bosqich Matematika ta'lim yo'nalishi talabalariga 5-semestr uchun « Gruppalar nazariyasi » fanidan yakuniy nazorat savollari

Imtihon shakli: yozma , og'zaki

1.	To'plamlar va ularning Dekart ko'paytmasi	To'plam tushunchasi, to'plamning quvvati va ularga oid misollar	To'plamlar o'rtasidagi ekvivalent munosabatlar va ularga oid misollar	$A=\{1,2,5\}$ va $B=\{3,6,7\}$ to'plamlarning Dekart ko'paytmasini toping.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tenglikni isbotlang.	\mathbb{Q} ratsional sonlar to'plami sanoqli ekanligini isbotlang.
2.		To'plamlarning Dekart ko'paytmasi va ularga oid misollar	Chekli va cheksiz to'plamlar va ularga sanoqli to'plamlar va ularga oid misollar	$A=\{2,4,6,8\}$ va $B=\{1,3,5,8\}$ to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi va simmetrik ayirmasini toping.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ tenglikni isbotlang.	Butun sonlar to'plami \mathbb{Z} sanoqli ekanligini isbotlang.
3.	To'plamlarda o'rnatilgan algebraik amallar	Algebraik amalar haqida tushuncha	Amalning xossalari	$(\mathbb{N}, -), (\mathbb{N}, \cdot)$ – lar gruppoid bo'ladimi.	$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ berilgan to'plamlar gruppaga bo'ladimi?	$a * b = a^2 b^2$;
4.		To'plamda bir amal tushunchasi	To'plamlardagi φ munosabat tushunchasi	(\mathbb{C}, \cdot) -ushbu to'plam gruppaga bo'ladimi?	$a * b = EKUB(a; b)$ Ushbu tenglikni monoid yoki gruppaga ekanligini aniqlang	$a * b = a^2 b^2$ Ushbu tenglikni monoid yoki gruppaga ekanligini aniqlang
5.	Gruppalar	Gruppaga tushunchasi	Kommutativ gruppaga haqida tushuncha va unga oid misollar	$(\mathbb{N}, +)$ va (\mathbb{N}, \cdot) – poligruppaga bo'ladimi?	(\mathbb{N}, \cdot) -ushbu to'plam gruppaga bo'ladimi?	(\mathbb{Z}, \cdot) -ushbu to'plamlar gruppaga bo'ladimi?

6.		Yarim grupp tushunchasi va unga oid misollar	Monoid haqida tushuncha va unga oid misollar	<p>Olmoshlarning ushbu</p> $H = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$ <p>to'plami S_4 gruppada qismgrupp ekanligini ko'rsating.</p>	(Q, \cdot) -ushbu to'plam grupp bo'ladimi?	(R, \cdot) -ushbu to'plam grupp bo'ladimi?
7.	n-darajali simmetrik grupp	Simmetrik grupp tushunchasi	O'rin almashtirish gruppasi haqida tushuncha va unga oid misollar	<p>Simmetrik S_3 gruppada</p> $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ va <p>$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ elementlardan iborat A qismgrupp va</p> $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ element uchun o'ng va chap qo'shni sinflar topilsin.	<p>Elementlari</p> $\alpha_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$ $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ <p>bo'lgan S_3 gruppada $e = \alpha_1, \alpha_6$ dan iborat H qismgrupp uchun o'ng va chap qo'shni sinflar topilsin.</p>	Uchburchakni aylantirishlar gruppasi kommutativmi?
8.		n-tartibli simmetrik gruppalar misollar keltiring	Juft va toq o'rniga qo'yishlar haqida tushuncha	To'g'ri to'rtburchak simmetriyasining gruppasi kommutativmi?	Romb simmetriyasi gruppasi kommutativmi?	Kvadratni aylantirishlar gruppasi kommutativmi?
9.	Kichik o'lchovli gruppalar	Grupp elementining tartibi tushunchasi va unga oid misollar	Kichik o'lchovli grupp haqida tushuncha	Muntazam uchburchakning simmetriyalar gruppasidagi elementlarning tartibini toping.	Kvadrat simmetriyalar gruppasidagi elementlarning tartibini toping	Romb simmetriyalar gruppasidagi elementlarning tartibini toping
10.		Elementning tartibi tushunchasi	Siklik grupp va uning tashkil etuvchisi	Muntazam 12 burchakning aylantirishlar gruppasidagi hamma tashkil etuvchilarni toping.	Barcha musbat xaqiqiy sonlar to'plami ko'paytirishga nisbatan grupp tashkil qiladimi?	Maxraji ikkining darajalaridan iborat barcha rasional sonlar to'plami qo'shishga nisbatan grupp tashkil qiladimi?

11.	Qism gruppalariga nisbatan qo'shni sinflar	Siklik gruppaning tartibi va qism gruppalari	Siklik gruppaga ta'rifi va unga oid misollar	Barcha toq sonlar to'plami, qo'shishga nisbatan gruppaga tashkil qiladimi?	Elementlari kompleks sonlar bo'lgan ikkinchi tartibli maxsusmas matrisalarning $GL(2, \mathbb{C})$ gruppasida quyidagi elementlar tartibini aniqlang: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;	Elementlari kompleks sonlar bo'lgan ikkinchi tartibli maxsusmas matrisalarning $GL(2, \mathbb{C})$ gruppasida quyidagi elementlar tartibini aniqlang: $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
12.		Keli jadvalini tuzish va unga oid misollar	O'rniga qo'yishlar va ularga oid misollar	Barcha juft sonlar to'plami, qo'shishga nisbatan gruppaga tashkil qiladimi?	Elementlari kompleks sonlar bo'lgan ikkinchi tartibli maxsusmas matrisalarning $GL(2, \mathbb{C})$ gruppasida quyidagi elementlar tartibini aniqlang: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	Birning 15-darajali ildizlarining har biri uchun uning tartibini ko'rsating.
13.	Normal qism gruppalar va faktor gruppalar	Normal qism gruppaga haqida tushuncha	Sodda gruppaga va unga oid misollar	S_3 o'rin almashtirishlar gruppaning qism gruppalari sonini toping.	Tartibi 100 bo'lgan $G = \langle g \rangle$ siklik gruppada tartibi 20 bo'lgan hamma elementlarini toping.	Muntazam uchburchakning barcha simmetriyalari uchun ko'paytirish jadvalini tuzing.
14.		Faktor gruppaga va unga oid misollar	Qism gruppaga ta'rifi va unga oid misollar	Kvadrat bo'lmagan to'g'ri to'rtburchakning hamma simmetriyasini toping va ko'paytirish jadvalini tuzing.	Kvadrat bo'lmagan romb barcha simmetriyalari uchun ko'paytirish jadvalini tuzing.	Kvadratning barcha simmetriyalari uchun ko'paytirish jadvalini tuzing.
15.	Normalizator. Gruppaga markazi	Normalizator tushunchasi va unga oid misollar	Gruppaga markazi tushunchasi va unga oid misollar	G gruppaning berilgan $g \in G$ element bilan o'rin almashinuvchi hamma elementlar (g elementning sentralizatori) ni toping, agar $G = S_4$, $g = (12)(34)$;	$GL(2, \mathbb{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;	$GL(2, \mathbb{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16.		Invariant qism gruppa tushunchasi va unga oid misollar	Lagranj va Koshi teoremlari	G gruppaning berilgan $g \in G$ element bilan o'rin almashinuvchi hamma elementlar (g elementning sentralizatori) ni toping, agar: $G = S_n$, $g = (123\dots)$ bo'lsa.	$GL(2, \mathbf{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;	$GL(2, \mathbf{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
17.	Gruppalar akslantirishlari	Gruppalarda akslanirish tushunchasi	Inyektiv va syurektiv akslantirishlarga misollar keltiring.	Agar $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x + 1$ va $g: R \rightarrow R$, $g(x) = 3x - 1$ bo'lsa, gf va $fg = ?$	Gruppa elementining sentralizatorini (shu element bilan o'rin almashtiriluvchi elementlar to'plamini) toping: S_4 gruppada $(1\ 2)(3\ 4)$ o'rin almashtirishning;	$GL(n, \mathbf{R})$ gruppaning $SL(n, \mathbf{R})$ normal qismgruppa bo'yicha faktor- gruppasini toping.
18.		Akslantirish turlari va ularga oid misollar	Teskari akslantirish tushunchasi va ularga oid misollar	Agar f, g , $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ to'plamning $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Bo'ladigan akslantirishlari bo'lsa, $gf, fg = ?$	Gruppa elementining sentralizatorini (shu element bilan o'rin almashtiriluvchi elementlar to'plamini) toping: S_4 gruppada $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ o'rin almashtirishning	Oldingi misolda G gruppaning 1 ga teng bo'lmagan N normal bo'luvchisi bo'yicha faktor- gruppasi G gruppaning o'ziga izomorf bo'lishi ko'rindi. Bu hol G chekli gruppa bo'lganda ham sodir bo'lishi mumkinmi?
19.	Gruppalar gomomorfizmi , gomomorfizm	Gomomorfizm tushunchasi	Gomomorfiz m xossalari	$f(z) = z^2$ qoida bilan berilgan $f: G^* \rightarrow R^*$ akslantirish (bu yerda	Noldan farqli hamma kompleks sonlarning G multiplikativ gruppasining modullari birga teng	Oltinchi tartibli H_1 siklik gruppaning o'n sakkizinchi tartibli H_2 siklik gruppaga

	turlari va xossalari			$G^* = G \setminus \{0\}, R^* = R \setminus \{0\}$ gomomorfizm bo'lishini aniqlang.	barcha kopleks sonlardan iborat N qismgruppasi bo'yicha faktor-gruppasini toping.	hamma gomomorfizmlarni toping.
20.		Gomomorfizm turlari	Gruppa Gomomorfizm haqidagi teorema va unga oid misollar	S_3 gruppada har bir qismgruppa bo'yicha o'ng qo'shni sinflarni toping;	Quyidagilar uchun hamma gomomorfizmlarni toping: p -tartibli $\langle a \rangle$ siklik gruppaning o'ziga gomomorfizmlarini;	Moduli 1 ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlarning G multiplikativ gruppasining 1 va -1 sonlardan iborat N qismgruppa bo'yicha faktor-gruppasini toping.
21.	Gruppaning avtomorfizmlari. Avtomorfizmlar gruppasi	Gruppa avtomorfizmlari haqida tushuncha	Gruppa izomorfizmi haqida tushuncha	Barcha musbat haqiqiy sonlarning $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$ multiplikativ gruppasi barcha haqiqiy sonlarning $(\mathbf{R}, +)$ additiv gruppasiga izomorfligini isbot qiling.	S_3 gruppaning barcha avtomorfizmlarini toping.	Kompleks sonlarning $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ multiplikativ gruppasi $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi maxsusmas (ya'ni, kamida, $a \neq 0$ yoki $b \neq 0$) matrislarning multiplikativ gruppasiga izomorfligini isbot qiling.
22.		Gruppa avtomorfizmiga oid misollar keltiring.	Avtomorfizmlar gruppasiga oid misollar keltiring.	Quyidagi qonuniyatlar bilan aniqlangan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ almashtirishlar to'plamlaridan qaysilari almashtirishlarni qo'paytirishga nisbatan gruppa ekanligini aniqlang. $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{R}, a > 0;$	Quyidagi qonuniyatlar bilan aniqlangan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ almashtirishlar to'plamlaridan qaysilari almashtirishlarni qo'paytirishga nisbatan gruppa ekanligini aniqlang. $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0;$	Barcha butun sonlarning $(\mathbf{Z}, +)$ additiv gruppasi barcha juft sonlarning $(2\mathbf{Z}, +)$ additiv gruppasiga izomorfligini isbot qiling
23.	Gruppaning to'plamda ta'siri.	Gruppaning to'plamga ta'siri haqida tushuncha	Gruppa tashkil qiladigan	Ushbu olmoshlar to'plamlarining qaysilari S_4	Quyidagicha berilgan matritsalar to'plamlari matritsalarini	Quyidagicha berilgan matritsalar to'plamlari matritsalarini ko'paytirishga

	Statsionar qism gruppalar		to'plamlarni keltiring	gruppaning qismgruppasi bo'ladi? $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$;	ko'paytirishga nisbatan gruppaga ekanligini isbot qiling. $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathcal{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$;	nisbatan gruppaga ekanligini isbot qiling. $\left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbf{R} \right\}$;
24.		Statsionar qism gruppalar haqida tushuncha	Siklik gruppaga haqida tushuncha va ularga oid misollar	Elementlari kompleks sonlar bo'lgan ikkinchi tartibli maxsus matritsalarining $GL(2, \mathbf{C})$ gruppasida quyidagi elementlar tartibini aniqlang: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	Ushbu olmoshlar to'plamlarining qaysilari S_4 gruppaning qismgruppasi bo'ladi? $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$;	Multiplikativ $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ gruppada quyidagi elementlarning tartibini toping: $z_k = \cos \frac{2\pi k}{150} + i \sin \frac{2\pi k}{150}$, $k = 15, 25$ bo'lganda;
25.	Gruppaning to'plamda ta'siri. Orbita tushunchasi	Orbita tushunchasi va unga oid misollar	Gruppaning normal bo'luvchisi va unga oid misollar	$GL(2, \mathbf{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;	$GL(2, \mathbf{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	Oltinchi tartibli H_1 siklik gruppaning o'n sakkizinchi tartibli H_2 siklik gruppaga hamma gomomorfizmlarni toping.
26.		Orbitaning to'plamga ta'siriga oid misollar keltiring.	Faktor gruppaga va unga oid misollar	$GL(2, \mathbf{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;	$GL(2, \mathbf{R})$ gruppada ushbu matritsalar sentrolizatorlarini toping: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;	Gruppaga elementining sentralizatorini (shu element bilan o'rin almashtiriluvchi elementlar to'plamini) toping: S_4 gruppada $(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$ o'rin almashtirishning.
27.	Gruppalar nazariyasining tatbiqlari	Halqa tushunchasi va unga oid misollar	Maydon va unga oid misollar	$(\mathcal{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ - maydon tashkil etishini tekshiring.	$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ - sistema maydon tashkil etishga tekshiring.	Ushbu $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$; to'plam ko'rsatilgan qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa va maydon tashkil etishini aniqlang.

28.		Jism haqida tushuncha va unga oid misollar	Liyaviy halqa (Li halqasi) haqida tushuncha	Ushbu $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$; to'plam ko'rsatilgan qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa va maydon tashkil etishini aniqlang.	Ushbu $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$; to'plam ko'rsatilgan qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa va maydon tashkil etishini aniqlang.	Nolning bo'luvchilari halqalarda nolning hamma bo'luvchilarini toping: $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$;
29.	Kompyuter algebrasi tizimlarida (Maple tizimida) gruppalariga doir masala va misollar yechish metodikasi	Maple tizimi haqida tushuncha	Maple yordamida tenglamalarni yechish	Maple tizimidan foydalanib $f(x) = x^5 - 6x^2 + 5$ funksiya grafigini chizing	Maple tizimidan foydalanib, $x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5 = 0$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.	Quyida berilgan matritsalar to'plami matritsalarini ko'paytirishga nisbatan gruppaga tashkil etadimi? $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$;
30.		Maple tizimdan foydalanib ko'phadning ildizlarini topish	Maple tizimidan foydalanib funksiyaning grafigini chizish	Quyidagi qonuniyatlar bilan aniqlangan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ almashtirishlar to'plamlaridan qaysilari almashtirishlarni ko'paytirishga nisbatan gruppaga ekanligini aniqlang: $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0$;	Quyidagi qonuniyatlar bilan aniqlangan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ almashtirishlar to'plamlaridan qaysilari almashtirishlarni ko'paytirishga nisbatan gruppaga ekanligini aniqlang: $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{Q}, a \neq 0$;	Quyida berilgan matritsalar to'plami matritsalarini ko'paytirishga nisbatan gruppaga tashkil etadimi? $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$;