Aniq va tabiiy fanlar kafedrasi Matematika yo'nalishi 22_01-guruh uchun Funksional analiz fanidan yakuniy nazorat savollari

№	Mavzu	1-QISM	2-QISM	3-QISM	4-QISM	5-qism
1.	Metrik fazolar va ularga misollar. Metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar. Izometriya. Metrik fazolarda yaqinlashishlar. Ochiq va yopiq to'plamlar.	Metrik fazoning ta'rifi va misollar.	Metrik fazoda uzluksiz akslantirish ta'rifi va misol	$\rho(x,y) = \vert \cos x - \cos y \vert, x,y \in \mathbb{R}$ metrika bo'ladimi? Metrikaning qaysi sharti bajarilmaydi.	$X = \mathbb{R}^1$. $\rho(x,y) = (x-y)^2$ metrika bo'ladimi? Qaysi metrik shart bajarilmaydi.	$X = \mathbb{R}^1$. $\rho(x,y) = \vert \sin x - \sin y \vert$ metrika bo'ladimi. Qaysi metrika sharti bajarilmaydi.
2.		Metrik fazoda gomeomorfizm ta'rifi va misol	Gyolder tengsizligini isbotlang	Q ni R ning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.	$X = R^n,\ \rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \vert x_k - y_k \vert^2$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$X = R^2,\ \rho(x,y) = \vert x_1 - y_2 \vert + \vert y_1 - x_2 \vert$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.
3.		Minkovskiy tengsizligini isbotlang.	Metrik fazoda izometriya ta'rifi va misol	R metrik fazo bo'lishini isbotlang.	$C[a;b]$ metrik fazo bo'lishini isbotlang.	ℓ_2 metrik fazo bo'lishini isbotlang.
4.		Metrik fazoda yopiq to'plam ta'rifi va unga misol	Limit nuqta, yakkalangan nuqta ta'riflari va ularga oid misollar	R\Q ning barcha limitik nuqtalari to`plamini toping.	Biror bo'sh bo'lmagan X - to'plam va bu to'plamda quyidagicha funksiya $d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y \\ 1, & \text{agar } x \neq y \end{cases}$ berilgan bo'lsin. Berilgan $d(x,y)$ - funksiya metrika ekanligi isbotlansin.	Shunday metrik fazoga va undagi ikkita $B(x_1, r_1)$, $B(x_2, r_2)$ sharlarga misol keltiringki, $r_1 < r_2$ va $B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2)$ bo'lsin.
5.		Metrik fazolarda yaqinlashish ta'rifi va unga doir misol.	Metrik fazolarda zich to'plamlar va ularga doir misollar.	$X = \ell_2,\ \rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \vert x_n - y_n \vert^2$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	[0,1] metrik fazoda $y_n(t) = t^n - t^{2n}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?	$C[0,1]$ metrik fazoda $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?

6.		To'plamning yopig'i ta'rifi	Metrik fazoda ochiq to'plam ta'rifi va unga misol	[0,1] metrik fazoda $x_n(t) = t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?	[0,1] metrik fazoda $x_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?	$x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ funksiyalar ketma-ketligi x(t)=0 funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, ammo $C_1[0,1]$ metric fazoda yaqinlashuvchi emas. Isbotlang.
7.		To'plam yopig'ining xossalari.	To'plamning urinish nuqtasi ta'rifi va unga oid misol	$X = N,\quad x = 5,\quad y = 24,\ \rho(x,y) = \frac{1}{10}\lvert x - y\rvert$. Berilgan metrikaga nisbatan bu funksiyalar orasidagi masofani toping.	$X = R^2,\ \rho(x,y) = \lvert x_1 - y_1\rvert + \lvert x_2 - y_2\rvert^2$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$\rho_1(f,g) = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert dx,\ X = C[a,b]$. Bu akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.
8.		Metrik fazoda yopiq to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi haqidagi teorema	To'plamning limitik nuqtasi ta'rifi va unga oid misol	$X = \mathbb{R}^3,\ \rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Berilgan metrikaga nisbatan $x = (8;4;3), y = (6;0;-1)$ vektorlar orasidagi masofani toping.	$X = R^2,\ \rho(x,y) = \lvert x_1 - y_1\rvert + 2\lvert x_2 - y_2\rvert^2$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$X = C[0,\pi], x(t) = \sin t, y = \cos t, \rho(x,y) = \max\limits_{0\le t\le\pi} \lvert x(t) - y(t)\rvert$. Berilgan metrikaga nisbatan bu funksiyalar orasidagi masofani toping.
9.	To'la metrik fazolar. Metrik fazolarni to'ldirish haqidagi teorema	To'la metrik fazo ta'rifi va unga oid misollar.	Metrik fazoni to'ldirmasi ta'rifi va unga oid misol	C[a, b] fazo to`la metrik fazodir. Isbotlang.	$\rho_1(f,g) = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert dx,\ X = C[a,b]$. Bu akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$X = \ell_2, x = (1,1,0,1,0,0,\dots), y = (0,0,0,\dots), \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lvert x_n - y_n\rvert^2}$. Berilgan metrikaga nisbatan bu elementlar orasidagi masofani toping.
10.	Metrik fazolarda kompakt va nisbiy	Kompakt metrik fazo ta'rifi va unga oid misollar	Nisbiy kompakt tushunchasi va unga oid misollar	l_2 fazosida yopiq va chegaralangan , ammo kompakt bo'lmagan to'plamga misol keltiring.	To'plamning chegaralanganligidan, uning nisbiy kompakt bo'lishi kelib chiqadimi? Misol keltiring.	$C[0;1]$ fazoda $\Phi = \{x_\alpha t = \frac{2\alpha t}{1+\alpha^2 t^2}, \alpha\epsilon(0;\infty)\}$ funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring.

11.	kompakt to’plamlar. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbiqlari	Qisuvchi akslantirish ta’rifi va unga oid misollar	Qo’zg’almas nuqta ta’rifi va unga oid misollar	$f(x) = x + \frac{1}{x}$ akslantirish $[1;\infty)$ nurda qisqartiruvchi bo’ladimi?	$f(x) = 4x - 4x^2$ funksiya [0;1] kesmani o’zini-o’ziga akslantirishga tekshiring. Bu akslantirish qisqartiruvchi bo’ladimi?	$A: f(x) \to \frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$ akslantirishning C[0;1] fazosida qisqartiruvchi ekanligini ko’rsating va uni qo’zg’almas nuqtasini toping.
12.		Qisuvchi akslantirishlar prinsipi	Qisuvchi akslantirishga misol keltiring	$X = \mathbb{R}^3,\ \rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$. Berilgan metrikaga nisbatan $x = (7;2;3), y = (6;0;-1)$ vektorlar orasidagi masofani toping.	$X = \mathbb{R}^3,\ \rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 +}$. Berilgan metrikaga nisbatan $x = (8;4;3), y = (5;1;-2)$ vektorlar orasidagi masofani toping.	C[0,2] fazoda aynan nol $(\theta(t) \equiv 0)$ va quydagi funksiya orasidagi masofani toping: $f(x) = x^3 - x^2 + 6$.
13.		Chiziqli fazo ta’rifi va unga oid misollar.	Chiziqli fazolarning o’zaro izomorfligi ta’rifi va unga misol	Berilgan fazoda quyidagi elementlar chiziqli bog‘lilanganmi? $\mathbb{R}^3$: $\bar{a} = (1,-2,4),\ \bar{b} = (-1,2,3),\ \bar{c} = (1,1,0)$.	Chiziqli bog’langanlikka tekshiring: $x_1(t) = 1,\ x_2(t) = cost,\ x_3(t) = cos^2t\ \in C[0,2\pi]$.	Chiziqli bog’langanlikka tekshiring:$x_1 = (1,1,2)\ \ x_2 = (1,0,1),\ \ x_3 = (1,0,0)\ \in R^3$.
14.	Chiziqli fazo ta’rifi va unga misollar. Izomorof fazolar. Chiziqli bog’langanlik. Chiziqli fazo o’lchami.	Chiziqli bog’langan elementlar sistemasi ta’rifi va unga misol	Chiziqli fazo o’lchami va unga oid misollar	Chiziqli bog’langanlikka tekshiring:$x_1 = (1,1,0)\ \ x_2 = (1,0,1),\ x_3 = (1,0,0)\ \in R^3$.	Chiziqli bog’langanlikka tekshiring:$x_1 = (1,1,2)\ \ x_2 = (1,0,1),\ x_3 = (1,1,1)\ \in R^3$.	Chiziqli bog’langanlikka tekshiring:$x_1 = (2,1,2)\ \ x_2 = (1,0,1),\ \ x_3 = (1,1,0)\ \in R^3$.
15.		Chiziqli bog’lanmagan elementlar sistemasi ta’rifi va unga misol	Cheksiz o’lchamli chiziqli fazo ta’rifi va unga doir misol	C[a, b] chiziqli fazo ekanligini ko’rsating.	$\mathbb{R}^n$ chiziqli fazo ekanligini ko’rsating.	$dim\mathbb{R}^3 = 3$ ekanligini ko’rsating.
16.		Chekli o’lchamli chiziqli fazo ta’rifi va unga doir misol	Chiziqli bog’langan va bog’lanmagan elementlar sistemalari ta’riflari	$E = R^3; x = (0,1,1), y = (1,0,1), z = (1,1,1)$. Chiziqli erklilikka tekshiring..	$E = R^3, x = (-1,0,1), y = (0,-1,1), z = (2,0,-1)$.	$dim\mathbb{R}^2 = 2$ ekanligini ko’rsating.

					Chiziqli erklilikka tekshiring.	
17.	Chiziqli fazoning qism fazosi. Chiziqli fazoning faktor fazosi	Chiziqli fazoning qism fazosi ta’rifi va misol	Chiziqli fazoning factor fazosi ta’rifi va misol	Berilgan fazoda quyidagi elementlar chiziqli bog’liqmi? $\mathbb{R}^3$: $\bar{a} = (1,-2,-1)$, $\bar{b} = (-1,2,3)$, $\bar{c} = (1,1,0)$.	Quyidagi vektorlar chiziqli erklimi: $\bar{a} = (1,-2,0)$, $\bar{b} = (-1,0,3)$, $\bar{c} = (1,1,0)$.	$d = (2,-3,4)$ $vektorni$ $a = (-1,2,0), b = (1,0,3), c = (0,-1,1)$ vektorlar orqali ifodalang.
18.		Chiziqli fazoda chiziqli funksional ta’rifi va unga oid misol	Qavariq to’plam ta’rifi va unga oid misol	Funksional chiziqlimi? $f: C[0,1] \to C, f(x) = \int_0^{\pi} x(t) cost\, dt.$	Funksional chiziqlimi? $f: L_1[0,1] \to C, f(x) = \int_0^1 e^t x(t) dt.$	$p: C[a,b] \to \mathbb{R}$, $p(x) = \int_b^a \lvert x(t)\rvert dt$ funksional norma bo’ladimi?
19.	Chiziqli funksionallar. Qavariq to’plam va qavariq funksionallar. Xan-Banax teoremasi	Chiziqli fazoda qavariq funksional ta’rifi va unga oid misol	Chiziqli fazolarda Xan-Banax teoremasi	$p: C[a,\mathrm{b}] \to R$ va $p(x) = \int_a^{\mathrm{b}} \lvert x(t)\rvert dt$ bo’lsa p akslantirish qavariq funksional ekanligini isbotlang	$\mathbb{R}^2$ fazoda $p(x,y) = x^2 + y^2$ funksionalni qavariqlikka tekshiring	$\mathbb{R}^2$ fazoda $p(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksionalni qavariqlikka tekshiring
20.		Qavariq jism ta’rifi va unga oid misol	Qavariq to’plamlarning kesishmasi haqidagi teorema	Funksional chiziqlimi? $f: R^3 \to R^{\bullet}, f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$	Funksional chiziqlimi? $f: C_{[0,1]} \to C, f(x) = \int_0^1 t^2 x(t) dt.$	Funksional chiziqlimi? $f: L \to C, f(x) = \int_0^1 sin\, t\, x(t) dt.$

21		Qavariq to'plam va qavariq jism ta'riflari	Chiziqli funksionalni davomi ta'rifi	Funksional chiziqlimi? f $\to R, f(x) = a_1x_1 + a_3x_3$.	Funksional chiziqlimi? $\to C, f(x) = \int_0^1 e^{3t}x(t)dt$	Funksional chiziqlimi? f: L $\to C, f(x) = \int_0^1 \cos t\, x\left(\frac{t}{3}\right) dt$.
22.	Chiziqli normalangan fazo ta'rifi va unga misollar. To'la normalangan fazolar. Normalangan fazoning qism fazosi va faktor fazosi.	Chiziqli normallangan fazo ta'rifi va unga oid misollar	To'la normallangan fazo ta'rifi va unga oid misollar	$p: C^{(2)}[a,b] \to R, p(x) = \|x(a)\| + \|x'(a)\| + \max_{a\le t\le b}\|x''(t)\|$ funksional norma bo'ladimi?	$p: C^{(2)}[a,b] \to R, p(x) = \|x(a)\| + \|x(b)\| + \max_{a\le t\le b}\|x''(t)\|$ funksional norma bo'ladimi?	$x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2+t^2} \in C[0;1], n = 1,2,3,\ldots$ ketma-ketlik ko'rsatilgan fazoda nolga yaqinlashadimi? Bunda norma $\|\|x\|\| = \max_{a\le t\le b}\|x(t)\|$.
23.		Norma ta'rifi va unga oid misol	Normalangan fazoning qism fazosi ta'rif va unga oid misol	$p: C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \int_b^a \|x(t)\|dt$ funksional norma bo'ladimi?	$p: C^{(1)}[a,b] \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \max_{a\le t\le b}\|x'(t)\|$ funksional norma bo'ladimi?	$P: C_{[a;b]} \to R, p(x) = \left(\int_a^b \|x(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ funksional norma bo'ladimi?
24.		To'la normalangan fazo ta'rifi va unga oid misol	Normalangan fazoning faktor fazosi	$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad p(x) = 2\|x_1\| + 3\|x_2\|$ funksional norma shartlsrini qanoatlantirishini tekshiring.	$p: C^{(1)}[a,b] \to R, \quad p(x) = \|x(b) - x(a)\| + \max_{a\le t\le b}\|x'(t)\|$ funksional norma bo'ladimi?	$P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p(x) = \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|$ funksional norma bo'ladimi?
25.	Evklid fazosi ta'rifi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Misollar.	Evklid fazosi ta'rifi va unga oid misollar	Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi	$E = C[a;b], p(x,y) = \int_a^b e^t x(t)y(t)dt$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = \mathbb{R}^3, \quad p(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = C[a,b], \ (x,y) = \int_a^b x^4(t)y^4(t)dt$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?
26.	Ortogonal normallangan sistema. Shmidtning ortogonallas	Ortogonal normallangan sistema tushuncha va unga oid misol	Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni	$E = L_2[0,1], x_1(t) = 1, x_2(t) = t$. Chiziqli erklilikka tekshiring va ularni ortogonallashtiring.	$E = R^3, x = (-1,0,1), y = (0,-1,1), z = (2,0,-1)$. Chiziqli erklilikka	$E = R^3, x = (0,-1,1), y = (2,0,-1)$. Chiziqli erklilikka tekshiring va ularni ortogonallashtiring.

	htirish jarayoni.				tekshiring va ularni ortogonallashtiring.	
27.	Bessel tengsizligi va Parseval tengligi. Yopiq ortogonal sistema.	Bessel tengsizligi	Parseval tengligi. Yopiq ortogonal sistema.	$C_2[-\pi;\pi]$ separabel Evklid fazosida $\{\phi_n(t)=\pi^{-0,5}sinnt\}_{n=1}^{\infty}$ sistema ortonormal bo'ladimi?	$C_2[-\pi;\pi]$ separabel Evklid fazosida $\{\phi_n(t)=\pi^{-0,5}sinnt\}_{n=1}^{\infty}$ sistema to'la bo'ladimi?	$C_2[-\pi;\pi]$ Evklid fazosida $\{\phi_n(t)=sinnt\}_{n=1}^{\infty}$ sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang.
28.	To'la Evklid fazosi. Riss-Fisher teoremasi. Evklid fazosining xarakteristik xossalari.	To'la Evklid fazosi ta'rifi va unga oid misollar	Riss-Fisher teoremasi.	$EE=\mathbb{R}^2,(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E=\mathbb{R}^2,(x,y)=x_1y_1-x_2y_1+2x_2y_2$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$L_2[-\pi;\pi]$ Evklid fazosida $\phi_n(t)=e^{int}, n\in Z$ sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang.
29.	Hilbert fazolari. Izomorfizm haqidagi teorema. Hilbert fazolarining qism fazosi. Ortogonal to'ldiruvchi. Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi	Hilbert fazo ta'rifi va unga oid misollar	Separabel Hilbert fazolarining o'zaro izomorfligi haqidagi teorema	$E=C[a,b],(x,y)=\int_a^b x^2(t)y^2(t)dt$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E=R^3,\ \rho(x,y)=x_1y_1-2x_2y_2-7x_3y_3$ skalyar ko'paytmani aniqlaydimi?	$E=C[a;b],p(x,y)=\int_a^b e^t x(t)y(t)dt$ ifoda skalyar kopaytma bo'ladimi?
30.		Hilbert fazosida ortogonal to'ldiruvchi tushunchasi	Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi tushunchasi	$E=R^3,(x,y)=\|x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3\|$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E=R^3,\ \rho(x,y)=\|x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3\|$ skalyar ko'paytmani aniqlaydimi?	$E=\ell_2,\ (x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_ky_k}{k}$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?

Tuzuvchilar: **dots. S.E.Usmanov**

ass. B.Po'latov

Kafedra mudiri: **dots. (PhD) Z.K.Shukurov**